Risiken der intuitiven Festlegung von Eingriffsgrenzen für eine Shewhart-Mittelwertkarte zur Prozessüberwachung

Dipl.-Ing. Frank Stockhaus, TEQ® Training & Consulting GmbH

Im Rahmen der statistischen Prozessüberwachung (SPC) werden in den Unternehmen täglich tausendfach Qualitätsregelkarten geführt und deren Ergebnisse benutzt, um fähige und stabile Prozesse zu erreichen. Insbesondere ist es wichtig, die mittlere Lage der wesentlichen Produktmerkmale auf Sollwert bzw. Toleranzmitte zu regeln. Üblicherweise wird für diese Aufgabe eine **Mittelwertkarte** nach **Shewhart** eingesetzt. Walter Andrew Shewhart führte bereits 1924 als Erster Qualitätsregelkarten ein und veröffentlichte diese in seinem Buch „Economic Control of Quality of Manufactured Product" 1931.

Beim Entwurf der Mittelwertkarte lautet die zentrale Frage: **Wie werden die Eingriffsgrenzen bestimmt?**

Dabei stehen die Abkürzungen OEG für die obere Eingriffsgrenze und UEG für die untere Eingriffsgrenze. Bei der Berechnung der Shewhart-Mittelwertkarte wird eine Normalverteilung als geeignetes Modell für die Beschreibung des zu überwachenden Merkmals unterstellt.

1. Intuitive Festlegung der Eingriffsgrenzen in Bezug zur Toleranz

In der Praxis beobachtet man gelegentlich Mittelwertkarten, deren Eingriffsgrenzen nicht auf der Basis statistischer Zusammenhänge, sondern intuitiv und vermeintlich pragmatisch bestimmt wurden. Beispielsweise werden die Eingriffsgrenzen so festgelegt, dass der Abstand zwischen OEG und UEG 70% der Toleranz umfasst, wobei die Grenzen symmetrisch zur Toleranzmitte liegen.

2. Statistisch basierte Bestimmung der Eingriffsgrenzen

Die klassische Vorgehensweise besteht darin, in einem Vorlauf die Parameter der Normalverteilung, den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ zu schätzen. Die Genauigkeit der Schätzungen hängt dabei von der Anzahl der untersuchten Einheiten in diesem Vorlauf ab. Deshalb wird üblicherweise ein Mindestumfang von 125 Einheiten, zerlegt in Teilstichproben von beispielsweise n=5, gefordert.

Mit der Ermittlung der Parameter der Normalverteilung aus dem Vorlauf ist die Verteilung der Einzelwerte bekannt und es kann damit die zu erwartende Verteilung der Mittelwerte berechnet werden, auf deren Grundlage die Eingriffsgrenzen berechnet werden. Die Mittelwertverteilung unterscheidet sich von der Verteilung der Einzelwerte nur durch eine geringere Standardabweichung. Es gilt:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

mit

$\sigma_{\bar{x}}$ Standardabweichung der Mittelwerte

σ Standardabweichung der Einzelwerte

n Stichprobenumfang der Mittelwertkarte

Auf der Grundlage der Mittelwertverteilung werden die Eingriffsgrenzen der zukünftig zu führenden Mittelwertkarte bestimmt (Bild 1).

Es ist allgemein üblich, für die Berechnung der Eingriffsgrenzen den 99%- oder den 99,73%-Zufallsstreubereich zu verwenden. In den folgenden Ausführungen wird der 99,73%-Bereich benutzt, d.h. die Eingriffsgrenzen entsprechen den $\mu \pm 3 \cdot \sigma_{\bar{x}}$ Grenzen der Mittelwertverteilung. Auf diese Weise ergibt sich folgende Gleichung zur Berechnung der Eingriffsgrenzen der Mittelwertkarte:

$$\begin{matrix} UEG \\ REG \end{matrix} = \mu_0 \pm 3 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

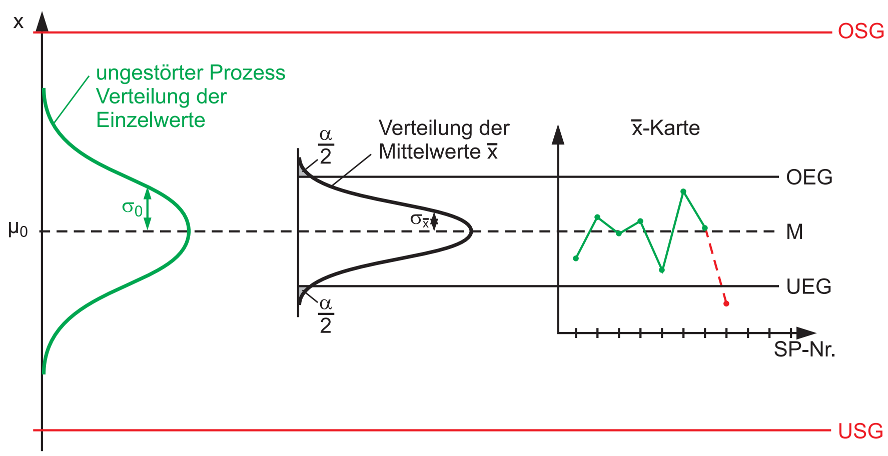

Bild 1: Ermittlung der Eingriffsgrenzen der Mittelwertkarte (Prinzip)

Für μ_0 kann

- die Toleranzmitte (Sollwert) oder
- die Schätzung $\hat{\mu}$ für den Erwartungswert aus dem Vorlauf

eingesetzt werden. Im Allgemeinen wird die Toleranzmitte bevorzugt. Damit regelt die Mittelwertkarte langfristig auf den geforderten Sollwert, das ist für die Prozessüberwachung meist sinnvoller als auf einen durch eine gewisse Unsicherheit behafteten, aus den Vorlaufdaten geschätzten Mittelwert zu regeln.

Für σ wird die Schätzung $\hat{\sigma}$ aus dem Vorlauf verwendet.

3. Vergleich

Die beiden Vorgehensweisen sollen für eine Mittelwertkarte mit dem Stichprobenumfang n=5 an Hand einer Prozesssituation verglichen werden, die der Mindestforderung in den meisten Firmenrichtlinien in der Automobilbranche entspricht. Dort verlangt man Prozessfähigkeitskennziffern von mindestens $C_p=C_{pk}=1{,}33$.

In diesem Fall beträgt die Standardabweichung $\sigma = \frac{T}{8}$ und der Erwartungswert ist ideal auf die Toleranzmitte T_m zentriert.

Setzt man diese Werte und n=5 in die Formel für die Eingriffsgrenzen der Shewhart-Mittelwertkarte ein, ergibt sich:

$$\begin{matrix} OEG \\ UEG \end{matrix} = \mu_0 \pm 3 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = T_m \pm 0{,}1677 \cdot T$$

D.h. der Abstand der Eingriffsgrenzen beträgt nur rund 33,5% der Toleranz.

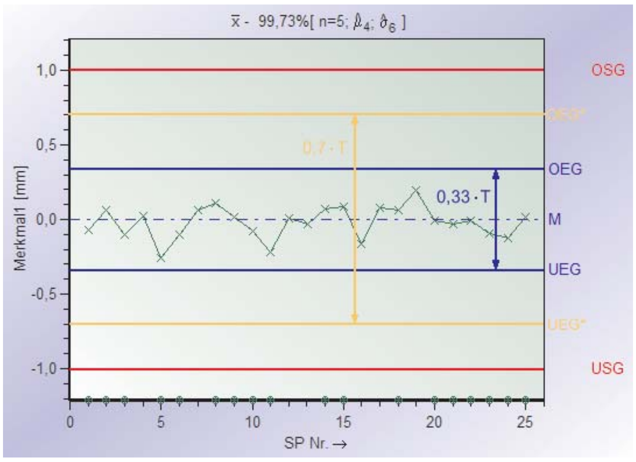

Bild 2: Vergleich der „echten“ Shewhart-Mittelwertkarte und der 70%-Karte

Im Bild 2 sind zum Vergleich die Eingriffsgrenzen der „echten“ Shewhart-Mittelwertkarte (OEG, UEG) und der 70%-Karte (OEG*, UEG*) ohne statistische Basis dargestellt. Um die Zusammenhänge einfach nachvollziehen zu können, sind die Karten für ein Merkmal mit der Spezifikation (0±1)mm berechnet worden.

Zunächst fällt im Bild 2 der große Unterschied bezüglich der Eingriffs grenzen auf. Die Eingriffsgrenzen für die intuitive Vorgehensweise liegen viel weiter auseinander. Außerdem ist zu beachten, dass bei der „echten“ Shewhart-Mittelwertkarte der Stichprobenumfang n und die Standardabweichung σ entscheidend den Abstand zwischen OEG und UEG bestimmen. Diese beiden Größen werden bei der intuitiven Festlegung vollkommen ignoriert.

Verschiebt sich die Lage des Prozesses weg vom Sollwert μ_0, dann wird die Regelkarte das durch Mittelwerte signalisieren, die außerhalb der Eingriffsgrenzen liegen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Mittelwertkarte eine derartige Prozessstörung erkennen? Bereits aus Bild 3 ist zu erkennen, dass diese Eingriffswahrscheinlichkeit $(1\text{-}P_a)$ von der Größe der Verschiebung des Erwartungswertes abhängt.

Wird die Eingriffswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Mittelwertverschiebung D_μ gegenüber dem Sollwert μ_0 grafisch dargestellt, ergibt sich die Eingriffskennlinie. Für die beiden zu vergleichenden Karten sind diese in Bild 4 gezeigt. Dabei ist die auf der Abszisse aufgetragene Mittelwertverschiebung auf die Toleranz normiert.

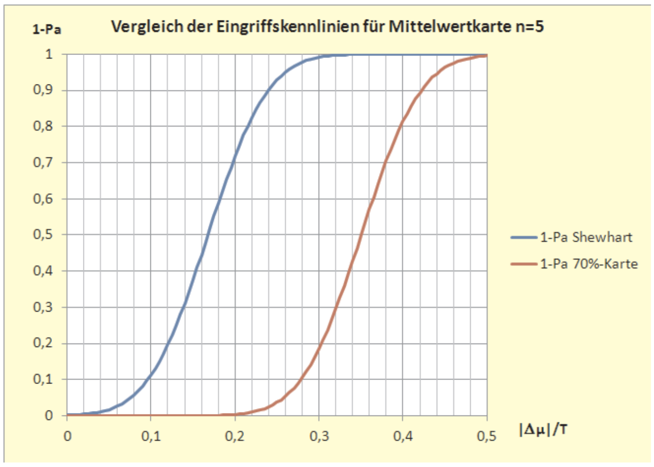

Bild 4: Eingriffskennlinien für die Shewhart-Mittelwertkarte und die 70%-Karte bei n=5

Die Abkürzungen bedeuten:

- $1\text{-}P_a$ Eingriffswahrscheinlichkeit der Regelkarte
- Δ_μ Abweichung des aktuellen Erwartungswertes vom Sollwert μ_0 ($\Delta_\mu = |\mu^* - \mu_0|$)
- T Toleranz

Es ist zu erkennen, dass die 70%-Karte Verschiebungen des Erwartungswertes viel später signalisiert als die echte Shewhart-Mittelwertkarte!

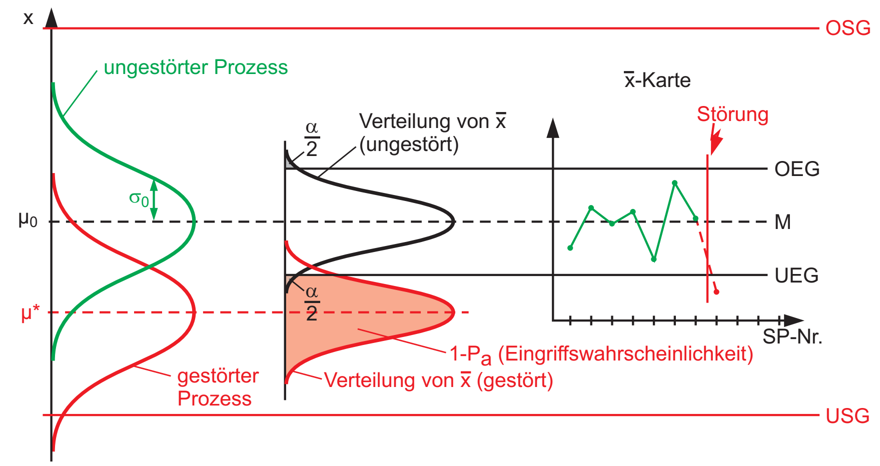

Bild 3: Berechnung der Eingriffswahrschein lichkeit der Mittelwertkarte (Prinzip)

Die 70%-„Regelkarte" ist nicht geeignet, relevante Prozessveränderungen durch plötzliche oder kontinuierliche Verschiebungen des Erwartungswertes (Shifts oder Trends) rechtzeitig zu signalisieren. Ein möglicher Alarm erfolgt mit hoher Wahrscheinlichkeit erst, wenn bereits mit einem großen Ausschussanteil zu rechnen ist!

Diese Erkenntnis soll mit einem Beispiel illustriert werden. Hat sich der wahre Erwartungswert unseres bereits in Bild 2 verwendeten Merkmals vom Sollwert μ_0=0 mm auf μ^*=0,7 mm vergrößert, entspricht das einem $\Delta\mu = |\mu^* - \mu_0|$ =0,7 mm. Bezogen auf die Toleranz T=OSG-USG=1-(-1)=2 beträgt $\Delta\mu$/T=0,7/2=0,35.

Damit kann aus Bild 4 für die 70%-Karte eine Eingriffswahrscheinlichkeit von 50% abgelesen werden. Das heißt, die Chance, diese große Prozessverschiebung mit der 70%-Karte bei der nächsten Stichprobenentnahme zu erkennen, ist nur 50%! Die Unfähigkeit dieser intuitiv festgelegten 70%-Karte wird noch deutlicher, wenn der zu erwartende Ausschussanteil für die betrachtete Prozessstörung berechnet wird.

Mit Hilfe von qs-STAT, Menüpunkt Zusätze\Wahrscheinlichkeitsverteilung, bestimmt man das in Bild 5 gezeigte Ergebnis. Es ergibt sich also ein zu erwartender Ausschussanteil von 11,5%!

Im Gegensatz zur 70%-Karte besitzt die „echte" Shewhart-Mittelwertkarte bei der o.g. Prozessverschiebung $\Delta\mu$/T=0,35 eine Eingriffswahrscheinlichkeit von nahezu 100%!

Zusammenfassung

Als Fazit kann man festhalten, dass zur Berechnung von Shewhart-Mittelwertkarten unbedingt die statistisch basierte Bestimmung der Eingriffsgrenzen benutzt werden sollte, wie sie im Abschnitt 2 beschrieben wurde.

Sind Vorlaufuntersuchungen nicht möglich, kann in Ausnahmefällen die Standardabweichung σ auch aus der Mindestforderung von C_p berechnet werden:

$$\sigma = \frac{T}{6 \cdot C_p}$$

Es ist allerdings zu beachten, dass die wahre Prozessstandardabweichung von der berechneten abweichen kann. Deshalb ist es sinnvoll, nach der Erfassung einer bestimmten Anzahl von Werten in der Regelkarte, die Standardabweichung empirisch zu bestimmen und ggf. die Eingriffsgrenzen neu zu berechnen.

Intuitiv auf der Grundlage von bestimmten %-Bereichen der Toleranz festgelegte Eingriffsgrenzen für Mittelwertkarten sind nach Möglichkeit zu vermeiden! Andernfalls ist wenigstens kritisch zu hinterfragen, ob sie überhaupt die gewünschte Schärfe bei der Erkennung von Prozessstörungen besitzen.

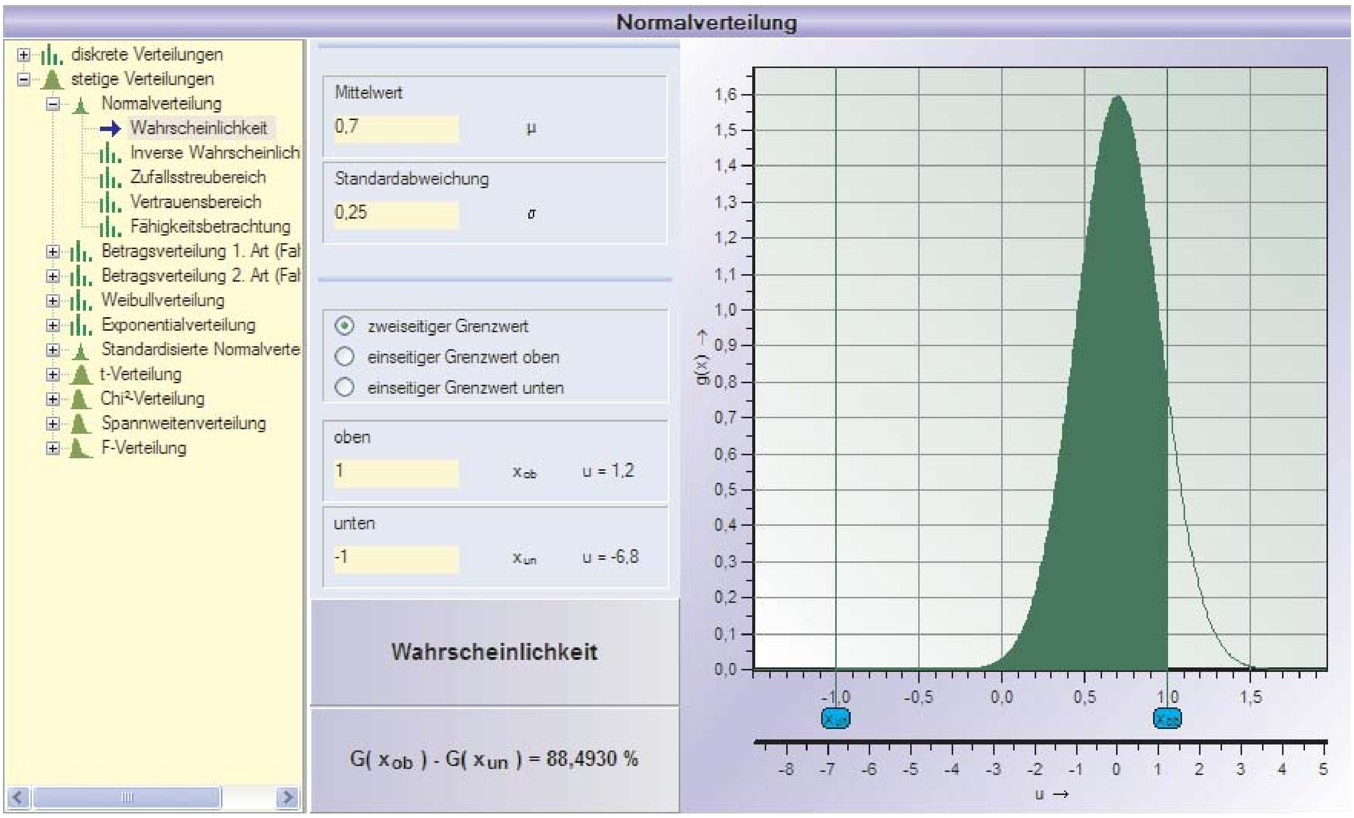

Bild 5: Ausbeute und Ausschussanteil bei einer Lageverschiebung $\Delta\mu$/T=0,35